Ejercicios de Análisis Matemático – Grado en Física

Números reales y complejos

1. Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica la siguiente desigualdad.
$$\frac{x^2 - 4x - 2}{x^3 + 1} > 0.$$

2. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\log\big(|x-6|(1+|x-3|)\big)}$.

3. Prueba que la función $f : [1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.

4. Dado un número entero $n \in \mathbb{Z}$, justifica que la función $f : [n\pi - \pi/2, n\pi + \pi/2] \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \operatorname{sen} x$, es inyectiva y expresa la inversa de f por medio de la función arcoseno. Representa gráficamente la función $h(x) = \operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x)$ para $x \in [-3\pi + \pi/2, 3\pi + \pi/2]$.

5. Justifica, usando las propiedades de la función exponencial, que la función $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $h(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x}}{2}$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de h.

6. Supuesto que $x = x + iy$ es un número complejo, calcula la parte real e imaginaria del número
$$w = \frac{z+i}{z-i}.$$

7. Calcula: a) $|(-1+i)^9(2-i)|$ b) $\left|\dfrac{5-\sqrt{3}i}{\sqrt{2} - i(\sqrt{5}+1)}\right|$.

8. Calcula los números complejos $z = x + iy$ tales que $\dfrac{2z-1}{z-2}$ es:

   a) Un número real.

   b) Un número imaginario puro.

   c) Un número de módulo 1.

9. Expresa los siguientes números en forma cartesiana:
$$\text{a) } (-1 + i\sqrt{3})^{11} \quad \text{b) } \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6 \quad \text{c) } (-\sqrt{3} + i)^{13}$$

10. Calcula todas las soluciones de las siguientes ecuaciones:
$$\text{a) } z^4 = i \quad \text{b) } z^3 = -1 + i\sqrt{3} \quad \text{c) } z^4 - i\sqrt{3}\,z^2 - 1 = 0$$

11. Haciendo uso de la fórmula de De Moivre prueba que $\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1$.